양자정보연구지원센터
Quantum Information Research Support Center
NEWSLETTER
<Research Trend>

※ 본 연구동향은 **양자정보연구지원센터** 뉴스레터의 내용입니다.

양자 회로 복잡도의 선형적 증가(Linear growth of quantum circuit complexity)

[작성: 고등과학원 권혁준 교수]

양자계의 복잡도(complexity)는 얼마나 빨리 증가할까? 이 물음은 양자 이론 전반에 걸쳐 끊임없이 제기된 질문이지만, 아직까지도 정확한 해답을 얻지 못하고 있다. 양자 알고리즘을 기술하는 유니터리(unitary) 행렬의 계산 복잡도 뿐만 아니라 양자역학적 블랙홀의 엔트로피(entropy)에 이르기까지 복잡도는 양자계를 이해하는 데에 있어 중요한 역할을 한다. 이번에 소개할 논문[1]은 양자 회로의 복잡도가 계의 크기에 비례해서 선형적으로 증가한다는 사실을 수학적으로 엄밀하게 밝혀내어 Nature Physics에 2022년에 출판된 연구결과이다.

연구 결과를 소개하기에 앞서, 양자 회로의 복잡도는 어떻게 측정 될 수 있을지 먼저 생각해보자. 고전적인 논리회로의 복잡도는 주어진 불 함수(Boolean function)를 표현하기 위해 필요한 최소한의 논리 연산자(AND, OR, NOR, NAND 등)의 개수로 나타낼 수 있을 것이다. 같은 논리로 양자 회로의 복잡도는 주어진 n-큐빗(qubit) 유니터리 연산을 표현할 수 있는 최소한의 양자 게이트(quantum gate) 수로 정의 할 수 있겠다.

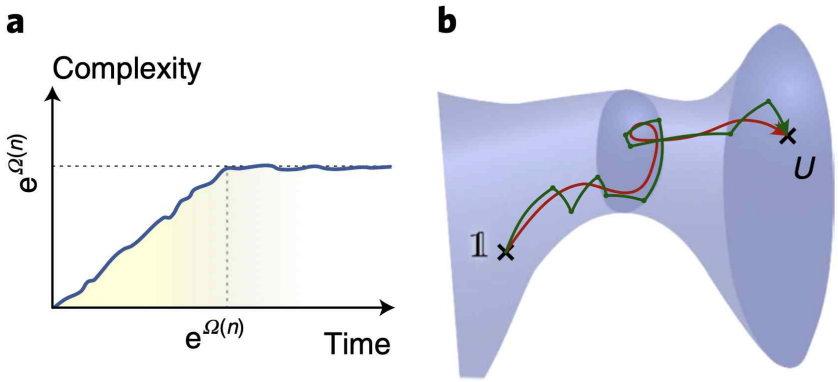

그림1. (a)양자 회로의 선형적 복잡도 증가 (b) 닐슨의 복잡도 문제

그렇다면 양자 회로의 복잡도가 선형적으로 증가한다는 이야기는 무슨 뜻일까? 양자계는 일반적으로 서로 간의 상호작용으로 인하여 시간이 지나면 지날 수록 더 많은 복잡도를 지니게 된다. 이러한 상호작용의 대표적인 수학적 모델로 두 큐빗 사이의 무작위 연산(two-qubit random gate)을 생각할 수 있는데, 이 때 양자 회로의 복잡도는 "n-큐빗 회로에서 R개의 두 큐빗 무작위 연산을 통하여 얻어진 유니터리 행렬이 몇 개의 두 큐빗 연산으로 표현될 수 있을까"의 질문으로 요약 될 수 있다. R개의 연산을 했으니 당연히 복잡도는 R에 비례하는 것이 왜 대단한 발견이냐고 이야기 할 수도 있겠지만, 그렇게 간단한 문제가 아니다. 이는 양자 연산들이 서로 상쇄되어 더 적은 숫자의 연산자로 표현될 수 있는 가능성이 항상 존재하기 때문이다. 극단적인 예로, CNOT게이트를 한 쌍의 큐빗에 두 번 가하게 되면 아무것도 가하지 않은 연산(identity)이 되어 필요한 연산 수는 2에서 0으로 줄어들게 된다.

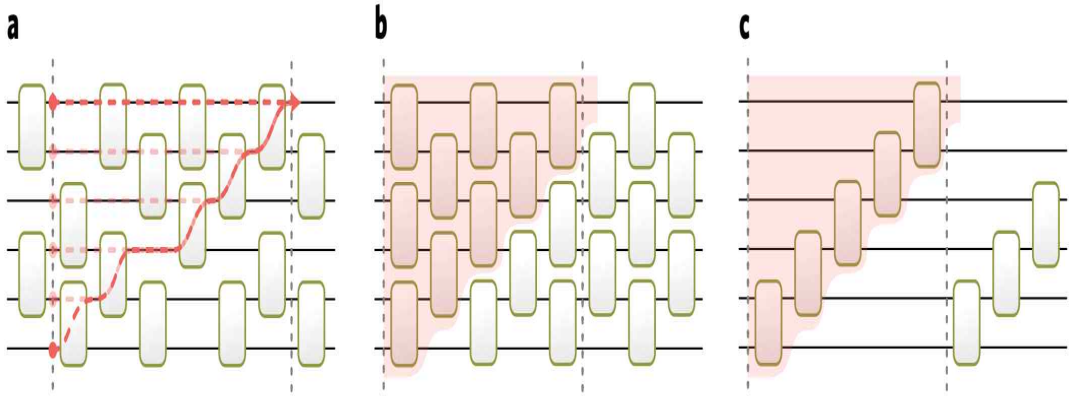

그림 2. 무작위 양자 회로의 블록화. 색칠된 부분은 역방향 빛 원뿔을 나타낸다

이 연구의 중심이 되는 아이디어는 무작위 연산들을 하나의 연산에 영향을 미치는 역방향 빛 원뿔(backward light cone)에 포함된 연산들로 블록화 시키는 것이다 (그림 2). 논문의 저자들은 이렇게 블록화된 구조가 표현할 수 있는 유니터리 연산의 개수를 비교하는 방식으로 무작위 연산들로 구성된 양자 회로의 복잡도 하한이 선형적으로 증가한다는 사실을 수학적으로 엄밀하게 증명해냈다 (그림 1 (a)). 이는 Brandao등이 최근에 증명한[2] 무작위 양자회로의 복잡도가 계의 크기에 대해 다항 함수(polynomially)로 증가한다는 사실보다 한 발짝 더 나아간 결과로 볼 수 있겠다.

양자 정보 이론의 관점에서 이번 연구 결과는 무작위 연산으로 구성된 양자 회로를 보다 작은 수의 연산들로 압축하는 것이 일반적으로 아주 드물게만 가능하다는 것으로 해석할 수 있으며, 이는 많은 숫자의 큐빗이 상호작용하는 양자 알고리즘의 한계점을 규명하는 실마리를 제공 할 것으로 보인다. 재미있게도 양자계의 복잡도가 선형적으로 증가한다는 사실은 고에너지 물리학에서 Brown과 Susskind가 웜홀의 부피 증가 역설(wormhole-growth paradox)를 풀기 위해 제시되었던 가설[3]이기도 하며[1)1], 양자 계산에 필요한 유니터리 행렬을 표현하기 위한 해밀토니안(Hamiltonian)의 최적 경로 문

제(Nielsen's geometric picture)[4]와도 깊은 관련이 있다 (그림 1(b)).

다만, 이 연구에서 밝혀낸 양자 회로의 복잡도의 선형적인 증가는 주어진 유니터리 연산을 오차 없이 정확히 표현해야 한다는 전제 조건을 가지고 있는데, 저자들이 논문에 언급한 것처럼 적당한 오차를 허용하는 보다 현실적인 상황에서 복잡도가 어떻게 바뀔지 알아보는 것이 향후 흥미로운 연구 방향이 될 것으로 예상된다.

참고문헌:

[1][1] J. Haferkamp, P. Faist, N. B. T. Kothakonda, J. Eisert, and N. Y. Halpern, Linear growth of quantum circuit complexity, Nat. Phys. (2022). https://doi.org/10.1038/s41567-022-01539-6.

[2] F. G. S. Brandao, W. Chemissany, N. Hunter-Jones, R. Kueng, and J. Preskill, Models of quantum complexity growth. PRX Quantum 2, 030316 (2021).

[3] A. R. Brown and L. Susskind, Second law of quantum complexity. Phys. Rev. D. 97, 086015 (2018).

[4] M. A. Nielsen, M. R. Dowling, M. Gu, and A. C. Doherty, Quantum computation as geometry. Science 311, 1133 (2006).

Quantum Information Research Support Center

1) 실제로 꽤 많은 양자 다체계(many-body quantum system)의 얽힘 엔트로피는 부피에 비례(volume law)하지 않고, 면적에 비례(area law)한다고 알려져 있다.